МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра комп’ютерної інженерії та електроніки

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА

з навчальної дисципліни

«Імовірнісно-статистичні методи інформаційних технологій»

Студентка гр. КН-23-1 ПІБ Варич А.І

Викладач к. т. н., доц. В. М. Сидоренко

Кременчук 2024

# Елементи комбінаторики

**Завдання 4**

У цих завданнях передбачається застосування числових методів для вирішення математичної задачі. Необхідно ввести вихідні параметри задачі, обчислити значення за допомогою обраного методу та перевірити правильність результатів порівнянням з теоретичними або заданими значеннями. Завдання фокусується на точності обчислень і ефективності обраного методу.

**Постановка задачі:** У групі 9 людей. Скільки різних підгруп можливо створити за умови, що в підгрупі має бути не менше, ніж дві людини?

Для будь-якої підгрупи, розмір якої варіюється від 0 до 9 осіб, можна обчислити поєднання:

Формула поєднань:

n – загальна кількість людей,

k – кількість людей у підгрупі

Отже, потрібно обчислити кількість можливих підгруп для

Порахуємо кількість підгруп для кожного значення k:

Відповідь: 502.

**Завдання 5**

**Постановка задачі:** Скількома способами можливо розташувати на полиці 7 різних книг, якщо: а) 2 певні книги повинні стояти поряд; б) ці дві книги не повинні стояти поряд?

а) Дві певні книги, які повинні стояти поряд, утворюють один "блок". Таким чином, ми маємо 6 "об'єктів" для розміщення на полиці: 5 окремих книг і 1 блок з двох книг.

Кількість способів розташувати ці 6 "об'єктів" на полиці дорівнює 6!

У межах блоку дві книги можуть бути розташовані в 2 способах (одна книга може стояти ліворуч, а інша праворуч)

б) Спочатку обчислимо загальну кількість способів розташування 7 книг без обмежень:

це буде

Для отримання кількості розташувань, при яких ці дві книги не стоять поряд, потрібно від загальної кількості розташувань відняти кількість розташувань, при яких ці дві книги стоять поряд:

Загальна кількість розташувань:

Розташування, де книги стоять поряд:

Розташування, де книги не стоять поряд:

Відповідь:

а) Кількість способів розташувати 7 книг так, щоб 2 певні книги стояли поряд — 1440.

б) Кількість способів розташувати 7 книг так, щоб 2 певні книги не стояли поряд — 3600.

**Завдання 6**

**Постановка задачі:** Групу з 20 студентів потрібно розділити на 3 бригади, за умови, що в першу бригаду повинні входити 3 людини, в другу – 5 і в третю – 12. Скількома способами це можливо виконати?

Кількість способів вибрати 3 людей з 20:

Кількість способів вибрати 5 людей з 17:

Загальна кількість способів розділити студентів:

**Завдання 7**

**Постановка задачі:** Скільки шестизначних чисел можливо створити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо кожне число повинно складатися з трьох парних і трьох непарних цифр, причому жодна цифра не входить у число більше, ніж один раз?

Вибираємо 3 парні цифри з 4 можливих (2, 4, 6, 8):

Вибираємо 3 непарні цифри з 5 можливих (1, 3, 5, 7, 9):

Кількість перестановок з 6 цифр:

Кількість перестановок:

**Завдання 8**

**Постановка задачі:** Скільки різних чисел можливо отримати, переставляючи числа 2 233 344 455?

Число 2 233 344 455 містить:

* Цифру 2, яка повторюється 2 рази
* Цифру 3, яка повторюється 3 рази
* Цифру 4, яка повторюється 3 рази
* Цифру 5, яка повторюється 2 рази

Кількість унікальних перестановок:

Розрахунок:

# Класичне визначення ймовірностей

Завдання передбачає використання різних методів для розв'язку систем лінійних рівнянь. Потрібно ввести матрицю коефіцієнтів і вектор вільних членів, застосувати обраний метод розв'язку (метод Гауса, метод Крамера) і знайти розв'язок для кожного невідомого. Важливо перевірити точність отриманих результатів і порівняти їх з теоретичними значеннями, якщо вони задані.

**Завдання 4**

**Постановка задачі:** Наугад вибирається тризначне число, у десятковому записі якого немає 0. Знайти ймовірність того, що у вибраного числа рівно 2 однакові цифри.

Нехай подія A полягає в тому, що у вибраного числа рівно дві однакові цифри.

Кожна цифра тризначного числа може бути вибрана з 9 варіантів (1-9), тому загальна кількість можливих чисел дорівнює:

Обираємо одну цифру, яка повторюється двічі. Це можна зробити 9 способами (цифри від 1 до 9):

Обираємо одну іншу цифру, яка не повторюється. Для цього є 8 варіантів:

Ці цифри можна розмістити на трьох позиціях, причому дві однакові можуть стояти на будь-яких двох із трьох місць. Кількість варіантів розміщення:

Тоді кількість сприятливих випадків:

**Завдання 5**

**Постановка задачі:** Власник однієї карточки лотереї «Спортлото» (6 із 49) закреслює 6 номерів. Яка ймовірність того, що він угадає: а) усі 6 номерів у наступному тиражі; б) 5 чи 6 номерів; в) хоча б один номер; г) рівно 2 номери; д) не менше 4 номери.

Загальна кількість можливих комбінацій із 49 номерів, серед яких вибирається 6, визначається комбінацією . Це кількість усіх можливих способів вибрати 6 номерів із 49, що дорівнює:

Кількість сприятливих випадків (де вгадуються всі 6 номерів) дорівнює 1, оскільки є тільки одна така комбінація:

Кількість сприятливих випадків, де вгадані 5 номерів із 6, визначається як для виграшних номерів та для однієї невгаданої кулі з решти 43:

Ймовірність того, що не буде вгадано жодного номера (додаткова подія до події C):

Тоді ймовірність вгадати хоча б один номер:

Ймовірність того, що будуть вгадані рівно 2 номери (подія D):

Ймовірність:

Загальна кількість сприятливих випадків:

Ймовірність:

**Завдання 6**

**Постановка задачі:** Дано три відрізки довжиною 2, 5, 6, 10. Яка ймовірність того, що з трьох навмання взятих відрізків можна побудувати трикутник.

Кількість усіх можливих комбінацій вибрати 3 відрізки з 4 дорівнює:

Комбінація 1: (2, 5, 6)

2 + 5 > 6 (правильно)

2 + 6 > 5 (правильно)

5 + 6 > 2 (правильно)

Комбінація 2: (2, 5, 10)

2 + 5 = 7, але 7 не більше 10 (неправильно)

Комбінація 3: (2, 6, 10)

2 + 6 = 8, але 8 не більше 10 (неправильно)

Комбінація 4: (5, 6, 10)

5 + 6 = 11, що більше 10 (правильно)

5 + 10 = 15, що більше 6 (правильно)

6 + 10 = 16, що більше 5 (правильно)

Кількість сприятливих випадків (де можна побудувати трикутник) дорівнює 2 (комбінації 1 і 4).

**Завдання 7**

**Постановка задачі:** В урні є 4 білі та 2 чорні кульки. Із цієї урни навмання взято 2 кульки. Знайти ймовірність того, що вони різного кольору.

Кількість усіх можливих комбінацій вибрати 2 кульки з 6 дорівнює комбінації :

Кількість способів вибрати 1 білу кульку з 4:

Кількість способів вибрати 1 чорну кульку з 2:

Кількість сприятливих випадків дорівнює:

Ймовірність:

**Завдання 8**

**Постановка задачі:** У групі 30 студентів, із яких 10 відмінників. Групу навмання розділено на 2 частини. Знайти ймовірність того, що в кожній частині по 5 відмінників.

Кількість усіх можливих комбінацій розділити 30 студентів на 2 частини по 15 визначається як комбінація :

Кількість способів вибрати 5 відмінників з 10 для однієї частини:

Кількість способів вибрати 10 студентів з решти 20 для другої частини:

Кількість сприятливих випадків:

Ймовірність:

# Геометрична ймовірність. Аксіоматичне визначення ймовірності

Завдання полягають в обчисленні значення визначеного інтегралу для заданої функції за допомогою числових методів, таких як метод трапецій або метод Сімпсона. Потрібно ввести функцію і визначити межі інтегрування, а також порівняти отримані результати з аналітичними значеннями, якщо вони відомі.

**Завдання 4**

**Постановка задачі:** На відрізок *AB* довжиною 12 см навмання ставлять точку *М*. Знайти ймовірність того, що площа квадрата, що побудований на відрізку *АМ*, буде між 36 см2 та 81 см2 .

Позначимо як довжину відрізка AM (відстань від точки A до точки M). Площа квадрата, побудованого на відрізку AM

Задача вимагає, щоб площа квадрата була між 36 см² та 81 см², тобто:

Візьмемо корінь з обох частин нерівності:

Таким чином, точка M повинна знаходитися на відрізку довжиною

Ймовірність того, що точка M буде на цьому відрізку, дорівнює відношенню довжини відрізка [6, 9] до загальної довжини відрізка AB, тобто:

**Завдання 5**

**Постановка задачі:** (Задача про зустріч). Дві людини домовилися зустрітись у певному місці між 12 та 13 годинами, причому кожна людина, яка прийшла, чекає іншу протягом 20 хвилин, після чого йде. Знайти ймовірність зустрічі цих людей, якщо кожна людина приходить на зустріч у випадковий момент часу, що не узгоджений з моментом приходу іншої людини.

Область можливих приходів для обох людей визначається квадратом зі стороною 60 хвилин (від 0 до 60 хвилин), тому площа квадрата дорівнює

Для того, щоб люди зустрілися, момент приходу однієї людини має відрізнятися від моменту приходу іншої не більше ніж на 20 хвилин. Це означає, що

Розглянемо дві нерівності:

та

Це дає нам систему:

та

Сформуємо дві прямі:

та

Область, в якій люди можуть зустрітися, утворює ромб. Вершини цього ромба будуть у точках (20, 0), (60, 40), (40, 60) і (0, 20)

Визначимо площу ромба. Площа ромба визначається формулою:

,

де і — довжини діагоналей.

Діагоналі ромба дорівнюють 40 (по осі y) і 40 (по осі x). Таким чином,

Тепер знайдемо ймовірність зустрічі, використовуючи відношення площ:

**Завдання 6**

**Постановка задачі:** На стелажі бібліотеки у випадковому порядку розставлено 15 підручників, причому 5 з них переплетені. Бібліотекар бере наугад 3 підручники. Знайти ймовірність того, що хоча б один з підручників, що взятий, буде переплетений (подія )

Для знаходження ймовірності події А зручніше використовувати доповнюючу подію А̅, тобто ймовірність того, що жоден з вибраних підручників не буде переплетений.

Визначимо ймовірність вибору 3 звичайних підручників. Для цього потрібно знайти кількість способів вибрати 3 підручники з 10 звичайних.

Кількість способів вибрати 3 підручники з 15 загалом дорівнює комбінаціям , а кількість способів вибрати 3 звичайних підручники з 10 дорівнює .

Використовуємо формулу для комбінацій , де n - загальна кількість елементів, k - кількість вибраних елементів.

Спочатку знайдемо загальну кількість способів вибору 3 підручників з 15:

Тепер знайдемо кількість способів вибору 3 непереплетених підручників. Оскільки 5 підручників переплетені, залишаються 10 непереплетених:

Тепер знайдемо ймовірність того, що жоден з вибраних підручників не буде переплетеним (подія A'):

Знайдемо ймовірність того, що хоча б один з вибраних підручників буде переплетеним (подія A):

**Завдання 7**

**Постановка задачі:** Для сигналізації про аварію встановлено два сигналізатори, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що при аварії спрацює перший сигналізатор, складає 0,95, другий – 0,9. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює:

а) лише один сигналізатор;

б) хоча б один сигналізатор.

ймовірність того, що спрацює перший сигналізатор

ймовірність того, що спрацює другий сигналізатор

а) Знайдемо ймовірність того, що спрацює лише один сигналізатор. Це може бути або перший без другого, або другий без першого:

б) Знайдемо ймовірність того, що спрацює хоча б один сигналізатор. Це доповнення до ймовірності того, що жоден не спрацює:

**Завдання 8**

**Постановка задачі:** Серед 100 лотерейних білетів є 5 виграшних. Знайти ймовірність того, що 2 наугад витягнуті білети будуть виграшними.

загальна кількість лотерейних білетів

кількість виграшних білетів

Спочатку знайдемо загальну кількість способів вибору 2 білетів з 100:

Тепер знайдемо кількість способів вибору 2 виграшних білетів з 5:

Тепер знайдемо ймовірність того, що обидва витягнуті білети будуть виграшними:

# Схема Бернуллі

У цих завданнях необхідно застосувати методи наближення для розв'язку рівнянь або функцій. Потрібно використовувати методи наближення, такі як метод Ньютона або інтерполяція, для знаходження коренів рівнянь або значень функцій. Задача також включає аналіз похибки отриманих результатів порівнянням з точними значеннями.

**Завдання 4**

**Постановка задачі:** Монету кинуто *10* разів. Знайдіть ймовірність того, що герб випаде: а) від *4* до *6* разів; б) хоча б один раз.

а) від 4 до 6 разів:

Для цього використовуємо формулу біноміального розподілу:

де,

Потрібно обчислити ймовірності для k = 4, 5, 6:

Обчислюю:

б) хоча б один раз:

Отже, **.**

**Завдання 5**

**Постановка задачі:** Яка ймовірність того, що при киданнях монети орел випаде рівно разів?

Використовуємо формулу біноміального розподілу:

**Завдання 6**

**Постановка задачі:** Імовірність настання події А в кожному з 900 незалежних випробувань дорівнює . Знайдіть імовірність того, що подія А відбудеться: а) 750 разів; б) 710 разів; в) від 710 до 740 разів.

а) 750 разів:

Обчислюю:

б) 710 разів:

в) від 710 до 740 разів:

P(710 ≤ X ≤ 740) = Σ P(k)

Наближення нормального розподілу для обчислення:

Середнє значення:

Дисперсія:

Стандартне відхилення:

Обчислюємо Z для k:

**Завдання 7**

**Постановка задачі:** Імовірність того, що електролампочка, виготовлена заводом, є бракованою, дорівнює *0,02*. Для контролю відібрано навмання *1000* лампочок. Оцінить імовірність того, що частота бракованих лампочок у вибірці відрізняється від імовірності *0,02* менше, ніж на *0,01*.

Маємо:

Середнє значення:

Дисперсія:

Стандартне відхилення:

Обчислюємо Z для k:

**Завдання 8**

**Постановка задачі:** (Задача 2020-го року про коронавірус). У Кременчуці станом на 03.04.20 було офіційно зареєстровано 4 хворі на коронавірус. Будемо реалістами і припустимо, що їх у сто разів більше, тобто 400. Маємо 250 000 жителів. Припускаємо, що жоден з вірусоносіїв не знаходиться у самоізоляції чи ізоляції та вільно пересувається містом. Отже, імовірність випадкової зустрічі з вірусоносієм складає . Припустимо, що супермаркет у центрі міста відвідують щодня 10000 покупців. Яка ймовірність того, що серед них буде хоча б один хворий на коронавірус?

Обчислюю:

# Закони розподілу та числові характеристики випадкових величин

Завдання передбачає застосування числових методів для розв'язку задачі оптимізації. Потрібно визначити функцію, що підлягає оптимізації, і застосувати методи пошуку оптимальних значень, такі як метод Ньютона. Результати необхідно порівняти з теоретичними значеннями або задати критерії точності для досягнення оптимальних розв'язків.

## Задача 4

**Постановка задачі:** В урні 7 кульок, з яких 4 білі, а інші – чорні. З цієї урни навмання беруть 3 кульки. ДВВ – кількість білих кульок. Необхідно: 1) знайти закон розподілу ДВВ; 2) виразити функцію розподілу та функцію щільності розподілу ДВВ за допомогою функції Хевісайда та -функції Дірака; 3) побудувати графіки функцій розподілу та щільності розподілу; 4) знайти ймовірність події ;   
5) побудувати багатокутник розподілу; 6) знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, теоретичні початкові та центральні моменти 3-го та 4-го порядку; 7) знайти асиметрію та ексцес.

Для обчислення ймовірностей необхідно розглянути всі можливі значення X, які можуть бути 0, 1, 2, 3. Загальна кількість способів вибору 3 кульок з 7

Вибираємо 0 білих і 3 чорні

Вибираємо 1 білу і 2 чорні

Вибираємо 2 білих і 1 чорну

Вибираємо 3 білі

Функція розподілу F(x):

Функція щільності f(x) представлена в точках:

Знайти ймовірність події x≥1:

Дисперсія:

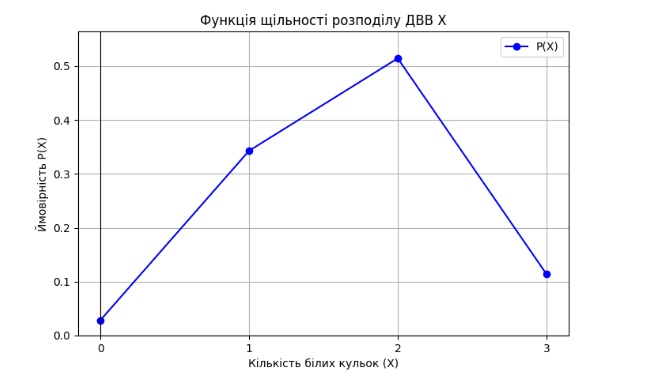
**

рис. 1 - Графік

## Задача 5

**Постановка задачі:** Завод відправив на базу 500 цілих деталей. Імовірність зіпсування кожної деталі в дорозі . Знайти закон розподілу ДВВ , що дорівнює кількості зіпсованих деталей, і знайти ймовірності подій:

* пошкоджено менше, ніж 3 деталі;
* пошкоджено більше, ніж 2 деталі;
* пошкоджено хоча б одну деталь.

Закон розподілу:

Пошкоджено менше ніж 3 деталі:

Пошкоджено більше ніж 2 деталі

Пошкоджено хоча б одну деталь

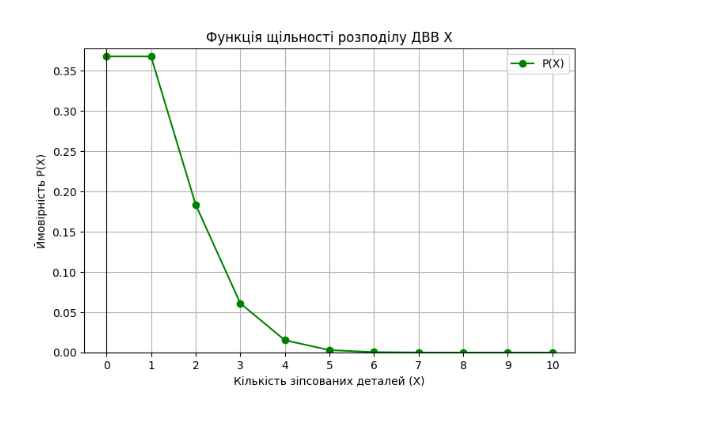


рис. 2 – Графік

## Задача 6

**Постановка задачі:** Два стрілки роблять по одному пострілу в одну мішень. Імовірність влучення для першого стрілка внаслідок одного пострілу , для другого – . ДВВ – кількість влучень у мішень. Необхідно: 1) знайти закон розподілу ДВВ , що дорівнює кількості влучень у мішень; 2) виразити функцію розподілу та функцію щільності розподілу ДВВ за допомогою функції Хевісайда та –функції Дірака; 3) побудувати графіки функцій розподілу та щільності розподілу; 4) знайти ймовірності подій та ; 5) побудувати багатокутник розподілу; 6) знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, теоретичні початкові та центральні моменти 3-го та 4-го порядку; 7) знайти асиметрію та ексцес.

Закон розподілу

Дисперсія:

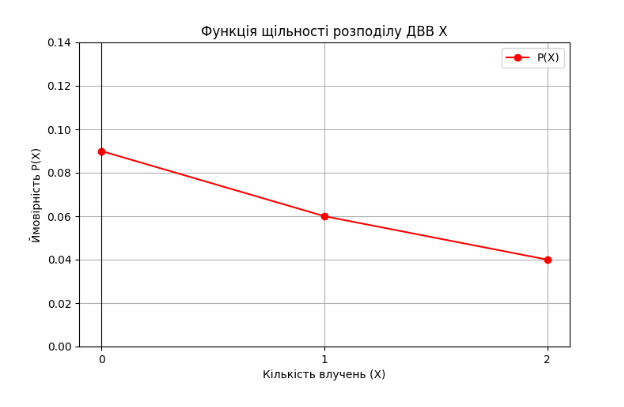


рис. 3 – Графік

## Задача 7

**Постановка задачі:** НВВ має рівномірний розподіл з параметрами . Функція щільності рівномірного розподілу . Вивести формулу функції рівномірного розподілу , формулу для математичного сподівання , дисперсії , асиметрії , ексцесу , імовірності події .

Функція розподілу

Сподівання

Дисперсія

Асиметрія

Ексцес

Ймовірність події

## Задача 8

**Постановка задачі:** НВВ має експоненціальний розподіл з параметром . Функція щільності експоненціального розподілу . Вивести формулу функції рівномірного розподілу , формулу для математичного сподівання , дисперсії , імовірності події .

Функція розподілу

Сповідання

Дисперсія

Імовірність події

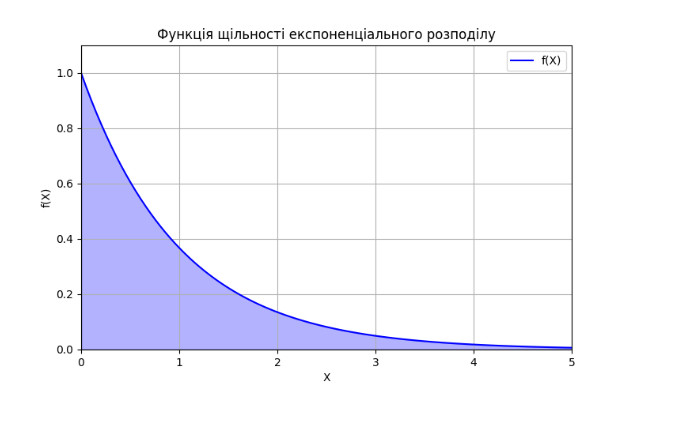
****

рис. 4 - Графік

# Висновок

Усі виконані завдання продемонстрували важливість правильного вибору числових методів для вирішення різних математичних задач. У кожному з завдань було використано різноманітні методи, що дозволяють знаходити розв'язки рівнянь, інтеграли та виконувати числові операції з високою точністю.

Під час роботи над завданнями особливу увагу було приділено перевірці точності результатів, а також порівнянню ефективності різних методів. Важливою частиною виконання завдань було забезпечення коректності обчислень, враховуючи можливі помилки округлення та числові обмеження.

Отримані результати підтвердили, що вибір методу повинен ґрунтуватися на характеристиках задачі, таких як складність обчислень, точність і обсяг даних. Вивчення цих методів сприяє розвитку навичок вирішення математичних задач за допомогою числових підходів та вміння адаптувати методи під конкретні умови.

# Найпростіший потік подій. Елементи теорії СМО. Ланцюги Маркова

## Завдання 4

**Постановка задачі:** Задано матрицю переходу . Знайти матрицю переходу .

Для знаходження матриці переходу на другому кроці потрібно перемножити матрицю P₁ на себе. Множення матриць дає нові ймовірності для переходу між станами через два кроки.

Задано матрицю переходу

Множимо кожен елемент матриці та додамо

Таким чином, матриця переходу після двох кроків виглядає так

## Завдання 5

**Постановка задачі:** Побудувати граф станів СМО «-клієнтів – Web-сервер» (система М/М/1) і систему рівнянь Колмогорова для , , . .

Ми маємо систему масового обслуговування (СМО) типу М/М/1, де є 4 можливі стани клієнтів на сервері.

Стан 0: Немає клієнтів в системі.

Стан 1: Один клієнт в системі.

Стан 2: Два клієнти в системі.

Стан 3: Три клієнти в системі.

Стан 4: Чотири клієнти в системі (максимальна кількість клієнтів).

Прихід нового клієнта (з інтенсивністю λ).

Обслуговування клієнта (з інтенсивністю μ).

Граф для системи:

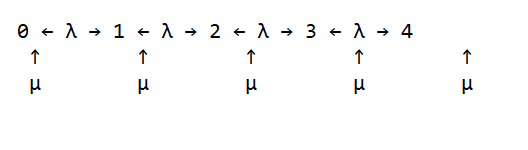


рис. 1

Рівняння Колмогорова:

Рівняння Колмогорова для системи описують ймовірність перебування системи в кожному зі станів (P₀, P₁, P₂, P₃, P₄) з урахуванням переходів між ними.

Для стану 0: λ \* P0 = μ \* P1

Для стану 1: λ \* P1 + μ \* P0 = λ \* P2 + μ \* P1

Для стану 2: λ \* P2 + μ \* P1 = λ \* P3 + μ \* P2

Для стану 3: λ \* P3 + μ \* P2 = λ \* P4 + μ \* P3

Для стану 4: μ \* P3 = λ \* P4

Система рівнянь:

P0 + P1 + P2 + P3 + P4 = 1

Граф:

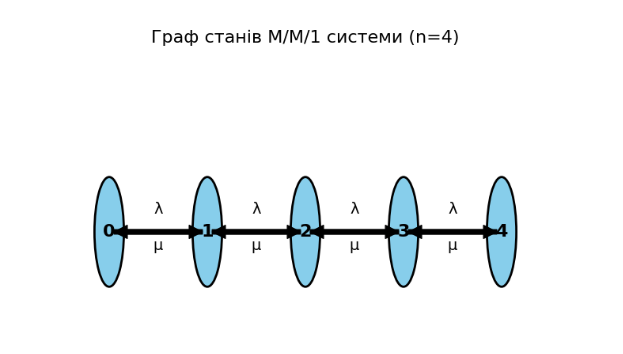


рис. 2

# Основи вибіркового методу

## Завдання 4

Виконати індивідуальне завдання, яке полягає в розрахунку числових і функціональних характеристик вибірки (вибірка вибирається згідно з варіантом) згідно з прикладами 4.1-4.20. Номер варіанта – номер студента в списку групи. У разі, якщо було досягнуто кінця списку задач, потрібно циклічно повернутися на його початок.

1. [ 2 7 7 4 5 ]

Сума вибірки: Сума елементів вибірки знаходиться шляхом додавання всіх чисел. У вашій вибірці є числа 2, 7, 7, 4, 5. Підсумок цих чисел дає 25.

Середнє арифметичне: Середнє арифметичне визначається як сума всіх елементів вибірки, поділена на кількість елементів. У нашому випадку, сума вибірки 25, а кількість елементів 5. Тому середнє арифметичне дорівнює 25 поділити на 5, що дає 5.

Медіана: Для знаходження медіани треба впорядкувати елементи вибірки у порядку зростання. Після впорядкування вибірки [ 2, 4, 5, 7, 7 ] медіаною буде середній елемент, тобто 5, оскільки кількість елементів непарне.

Мода: Мода — це значення, яке найчастіше зустрічається у вибірці. У вашій вибірці є два числа 7, які повторюються найбільше разів. Тому мода дорівнює 7.

Дисперсія: Дисперсія вимірює, наскільки сильно відхиляються елементи вибірки від середнього значення. Для розрахунку дисперсії спочатку потрібно знайти різницю між кожним елементом вибірки та середнім значенням, потім ці різниці піднести до квадрату, і врешті-решт взяти середнє значення квадратів різниць.

Тепер знайдемо середнє значення цих квадратів